

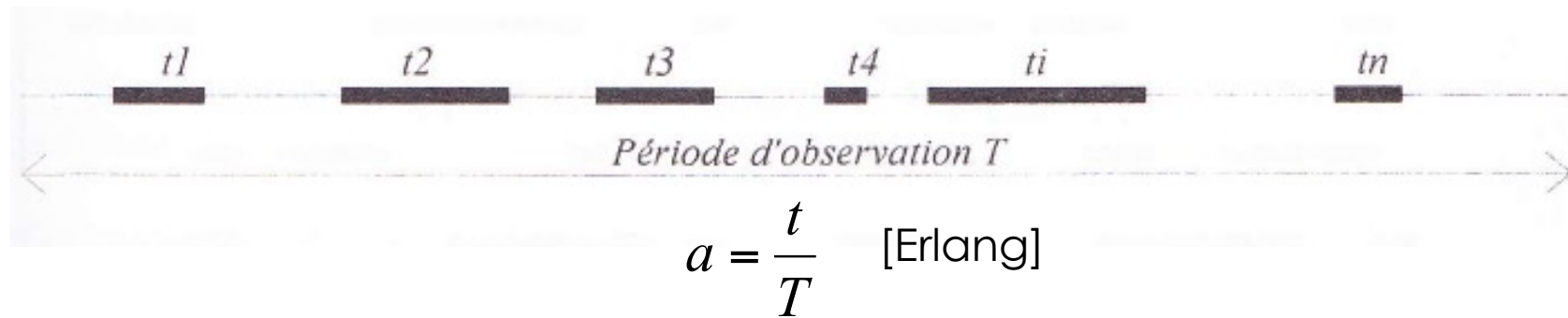
Erlang-B

# Problème de dimensionnement

- L'un des problèmes importants de la commutation est de déterminer le nombre des ressources (telles que les jonctions) qu'il faut installer pour que la probabilité qu'il n'y en ait pas suffisamment soit négligeable

# Notion de trafic

- Le trafic « a » d'une machine est la moyenne de la proportion du temps pendant laquelle elle est occupée



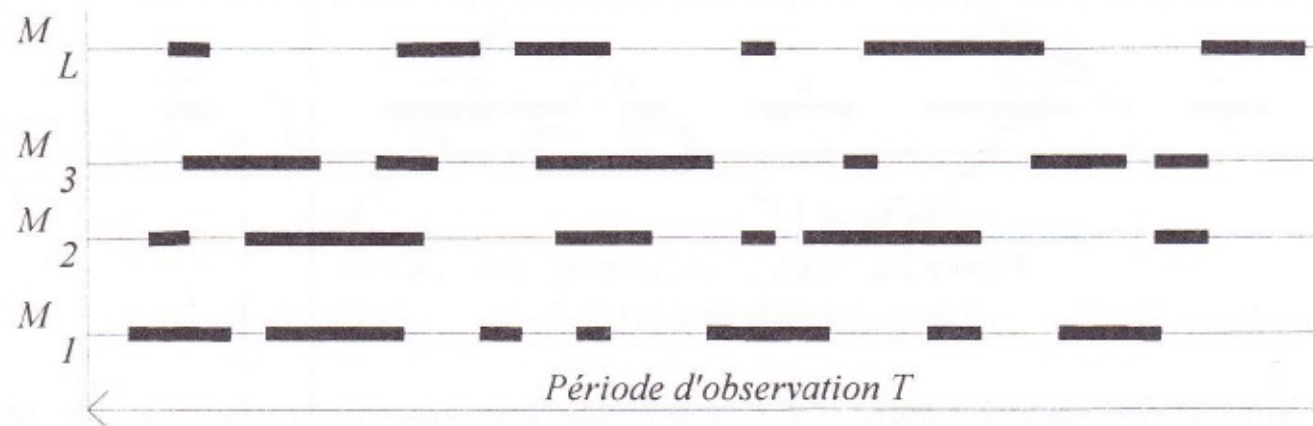
- Une machine peut être une ligne ou une jonction dans le contexte du réseau téléphonique
- Si une ligne est occupée 10% du temps, son trafic est de 0,1 Erlang

## Remarque sur le trafic n°1

- Dans le cas d'une seule machine, son trafic exprimé en Erlang est aussi sa probabilité d'occupation
- Le trafic d'une machine ne peut pas être supérieur à 1 Erlang

# Trafic d'un groupe de machines (1)

- Le trafic « A » d'un groupe de machines est la moyenne du temps total d'occupation de machines ramené à la période d'observation



$$A = \frac{\sum t_{M_i}}{T}$$

- Le trafic d'un groupe de L machines ne peut pas être supérieur à L Erlangs

## Trafic d'un groupe de machines (2)

- Formule pratique pour calculer le trafic d'un groupe de machines

$$\sum_{M_i} t_{M_i} = n\tau \quad \longrightarrow \quad \boxed{A = \frac{n\tau}{T}}$$

- $\tau$  est le temps moyenne de prise d'une machine
- $n$  est le nombre total de prise de machines observées en moyenne pendant le temps  $T$
- Supposer que les divers événements conduisant à des prises de machine soient indépendants

## Remarque sur le trafic n°2

- Le trafic du groupe est la somme du trafic de chaque machine
- Si toutes les machines du groupe ont individuellement le même trafic  $a$

$$A = L \times a$$

# Exemple de calcul de trafic

- 10 000 usagers sont raccordés à un certain commutateur. Chaque usager a un trafic de 0,1 Erlangs. Les appels durent 3 minutes. Quel est le nombre d'appels écoulé par heure par ce commutateur ?
- Le trafic total du commutateur

$$A = La = 10000 \times 0,1 = 1000 \text{ [Erlangs]}$$

- Nous avons

$$A = \frac{n\tau}{T} \Rightarrow n = A \frac{T}{\tau}$$

- Avec  $A = 1000$  Erlangs,  $T = 60$  minutes,  $t = 3$  minutes

$$n = 1000 \frac{60}{3} = 20000 \text{ [appels en une heure]}$$



# Loi B d'Erlang

- Quand le nombre de client est grand, très supérieur au nombre de serveurs, la probabilité de perte d'appels est égale à

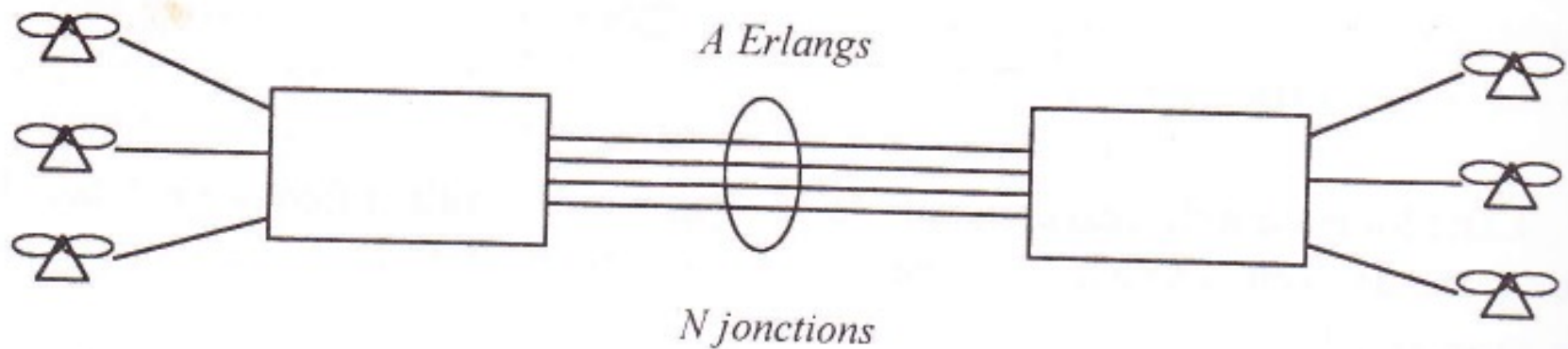
$$B = E_{1,N}(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}}$$

N: le nombre de serveurs

A: le trafic généré par l'ensemble des clients

# Exemple pratique (1)

- Supposons que nous ayons entre deux centraux téléphoniques un trafic de  $A = 100$  Erlangs. Quel nombre  $N$  de circuits devons-nous installer entre ces deux centraux pour que la probabilité de perte d'appels  $P(A)$  soit inférieure à  $\varepsilon = 10^{-4}$  ?



## Exemple pratique (2)

- Nous calculons  $E_{1,N}(A)$  pour des valeurs croissantes de  $N$  jusqu'à ce que l'on trouve un nombre  $N$  tel que  $E_{1,N}(A) < \varepsilon$
- Résultat:  $N = 137$  circuits

# Table d'Erlang-B (1)

Offered traffic flow A in erlang

n	Loss probability (E)										n
	0.00001	0.00005	0.0001	0.0005	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	
1	.00001	.00005	.00010	.00050	.00100	.00200	.00301	.00402	.00503	.00604	1
2	.00448	.01005	.01425	.03213	.04576	.06534	.08064	.09373	.10540	.11608	2
3	.03980	.06849	.08683	.15170	.19384	.24872	.28851	.32099	.34900	.37395	3
4	.12855	.19554	.23471	.36236	.43927	.53503	.60209	.65568	.70120	.74124	4
5	.27584	.38851	.45195	.64857	.76212	.89986	.99446	1.0692	1.1320	1.1870	5
6	.47596	.63923	.72826	.99567	1.1459	1.3252	1.4468	1.5421	1.6218	1.6912	6
7	.72378	.93919	1.0541	1.3922	1.5786	1.7984	1.9463	2.0614	2.1575	2.2408	7
8	1.0133	1.2816	1.4219	1.8298	2.0513	2.3106	2.4837	2.6181	2.7299	2.8266	8
9	1.3391	1.6595	1.8256	2.3016	2.5575	2.8549	3.0526	3.2057	3.3326	3.4422	9
10	1.6970	2.0689	2.2601	2.8028	3.0920	3.4265	3.6480	3.8190	3.9607	4.0829	10
11	2.0849	2.5059	2.7216	3.3294	3.6511	4.0215	4.2661	4.4545	4.6104	4.7447	11
12	2.4958	2.9671	3.2072	3.8781	4.2314	4.6368	4.9038	5.1092	5.2789	5.4250	12
13	2.9294	3.4500	3.7136	4.4465	4.8306	5.2700	5.5588	5.7807	5.9638	6.1214	13
14	3.3834	3.9523	4.2388	5.0324	5.4464	5.9190	6.2291	6.4670	6.6632	6.8320	14

<http://www.itu.int/itudoc/itu-d/dept/psp/ssb/planitu/plandoc/erlangt.pdf>

## Table d'Erlang-B (2)

<b>128</b>	87.570	91.278	95.059	97.704	100.12	102.75	104.45	105.75	106.82	107.74	<b>128</b>
<b>129</b>	88.400	92.129	93.919	98.648	101.01	103.66	105.37	106.68	107.75	108.67	<b>129</b>
<b>130</b>	89.232	92.980	94.779	99.533	101.91	104.57	106.29	107.60	108.68	109.61	<b>130</b>
<b>131</b>	90.064	93.831	95.640	100.42	102.81	105.48	107.21	108.53	109.62	110.55	<b>131</b>
<b>132</b>	90.896	94.684	96.502	101.30	103.71	106.39	108.13	109.46	110.55	111.49	<b>132</b>
<b>133</b>	91.730	95.537	97.364	102.19	104.60	107.30	109.05	110.39	111.48	112.42	<b>133</b>
<b>134</b>	92.564	96.390	98.226	103.08	105.50	108.22	109.97	111.31	112.42	113.36	<b>134</b>
<b>135</b>	93.399	97.244	99.090	103.96	106.40	109.13	110.89	112.24	113.35	114.30	<b>135</b>
<b>136</b>	94.234	98.099	99.953	104.85	107.30	110.04	111.82	113.17	114.28	115.24	<b>136</b>
<b>137</b>	95.070	98.954	100.82	105.74	108.20	110.95	112.74	114.10	115.22	116.18	<b>137</b>
<b>138</b>	95.907	99.810	101.68	106.63	109.10	111.87	113.66	115.03	116.15	117.12	<b>138</b>
<b>139</b>	96.744	100.67	102.55	107.52	110.00	112.78	114.58	115.96	117.09	118.06	<b>139</b>
<b>140</b>	97.582	101.52	103.41	108.41	110.90	113.70	115.51	116.89	118.02	119.00	<b>140</b>
<b>141</b>	98.421	102.38	104.28	109.30	111.81	114.61	116.43	117.82	118.96	119.94	<b>141</b>
<b>142</b>	99.260	103.24	105.15	110.19	112.71	115.53	117.35	118.75	119.90	120.88	<b>142</b>
<b>143</b>	100.10	104.10	106.02	111.08	113.61	116.44	118.28	119.68	120.83	121.82	<b>143</b>
<b>144</b>	100.94	104.96	106.88	111.97	114.51	117.36	119.20	120.61	121.77	122.76	<b>144</b>
<b>145</b>	101.78	105.82	107.75	112.86	115.42	118.28	120.13	121.54	122.71	123.71	<b>145</b>
<b>146</b>	102.62	106.68	108.62	113.75	116.32	119.19	121.05	122.47	123.64	124.65	<b>146</b>
<b>147</b>	103.46	107.54	109.49	114.65	117.23	120.11	121.98	123.41	124.58	125.59	<b>147</b>
<b>148</b>	104.31	108.40	110.36	115.54	118.13	121.03	122.91	124.34	125.52	126.53	<b>148</b>
<b>149</b>	105.15	109.26	111.23	116.43	119.04	121.95	123.83	125.27	126.46	127.48	<b>149</b>
<b>150</b>	105.99	110.12	112.10	117.33	119.94	122.86	124.76	126.21	127.40	128.42	<b>150</b>
<b>151</b>	106.84	110.99	112.97	118.22	120.85	123.78	125.69	127.14	128.33	129.36	<b>151</b>
	<b>0.00001</b>	<b>0.00005</b>	<b>0.0001</b>	<b>0.0005</b>	<b>0.001</b>	<b>0.002</b>	<b>0.003</b>	<b>0.004</b>	<b>0.005</b>	<b>0.006</b>	
<b>n</b>	<b>Loss probability (E)</b>										<b>n</b>

# Table d'Erlang-B (3)

## Erlang B tables generator

130	94.7
131	95.6
132	96.4
133	97.3
134	98.2
135	99
136	99.9
137	100.8
138	101.6
139	102.5
140	103.4
141	104.2
142	105.1
143	106
144	106.8
145	107.7
146	108.6
147	109.4
148	110.3
149	111.2
150	112

Blocking probability:	Number of circuits:	Traffic
0.01 %	initial value 1	<input checked="" type="radio"/> Offered
	last value 200	<input type="radio"/> Carried
	modularity 1	

Calculate Clear

Done.

# Approximation pour inverser la loi d'Erlang

- Si  $E1, N(A) = \varepsilon = 10^{-k}$ , alors

$$N \cong A + k\sqrt{A}$$

- Exemple
  - $A = 100$
  - $k = 4$

$$N = 100 + 4\sqrt{100} = 140 \text{ (circuits)}$$

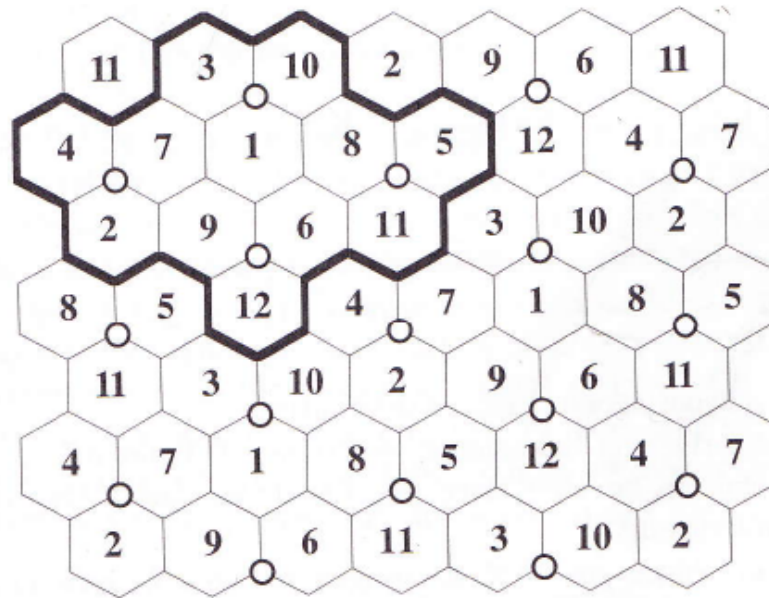
## Exemple sur GSM (1)

- Soit une zone couvrant une population de 10 000 abonnés ayant chacun un trafic de 25 mE. 24 fréquences sont disponibles et alloués aux cellules selon un motif de réutilisation avec  $K=12$ . Dans chaque cellule, 2 canaux physiques sont utilisés pour la signalisation et le contrôle commun. Le taux de blocage admissible a été fixé à 2%. Déterminer le nombre de cellules pour couvrir cette zone



# Exemple sur GSM (2)

- Motif K = 12



- Le nombre de fréquences par cellule

$$24/12 = 2$$

# Exemple sur GSM (3)

- Le nombre de canaux de trafic par cellule

$$(2 * 8) - 2 = 14$$

- Une cellule peut supporter au maximum 14 communications simultanées
- Avec le taux de blocage de 2%, le trafic qui peut être écoulé par une cellule est de 8,2 Erlang
- Chaque cellule peut desservir

$$8,2 / 0,025 = 328 \text{ abonnés}$$

- Le nombre de cellules nécessaires pour la zone considérée sera donc

$$10\ 000 / 328 = 30 \text{ cellules}$$

# Exemple sur GSM (4)

n = 1 - 51

Offered traffic flow A in erlang

n	Loss probability (E)										n
	0.007	0.008	0.009	0.01	0.02	0.03	0.05	0.1	0.2	0.4	
1	.00705	.00806	.00908	.01010	.02041	.03093	.05263	.11111	.25000	.66667	1
2	.12600	.13532	.14416	.15259	.22347	.28155	.38132	.59543	1.0000	2.0000	2
3	.39664	.41757	.43711	.45549	.60221	.71513	.89940	1.2708	1.9299	3.4798	3
4	.77729	.81029	.84085	.86942	1.0923	1.2589	1.5246	2.0454	2.9452	5.0210	4
5	1.2362	1.2810	1.3223	1.3608	1.6571	1.8752	2.2185	2.8811	4.0104	6.5955	5
6	1.7531	1.8093	1.8610	1.9090	2.2759	2.5431	2.9603	3.7584	5.1086	8.1907	6
7	2.3149	2.3820	2.4437	2.5009	2.9354	3.2497	3.7378	4.6662	6.2302	9.7998	7
8	2.9125	2.9902	3.0615	3.1276	3.6271	3.9865	4.5430	5.5971	7.3692	11.419	8
9	3.5395	3.6274	3.7080	3.7825	4.3447	4.7479	5.3702	6.5464	8.5217	13.045	9
10	4.1911	4.2889	4.3784	4.4612	5.0840	5.5294	6.2157	7.5106	9.6850	14.677	10
11	4.8637	4.9709	5.0691	5.1599	5.8415	6.3280	7.0764	8.4871	10.857	16.314	11
12	5.5543	5.6708	5.7774	5.8760	6.6147	7.1410	7.9501	9.4740	12.036	17.954	12
13	6.2607	6.3863	6.5011	6.6072	7.4015	7.9667	8.8349	10.470	13.222	19.598	13
14	6.9811	7.1155	7.2382	7.3517	8.2003	8.8035	9.7295	11.473	14.413	21.243	14
15	7.7139	7.8568	7.9874	8.1080	9.0096	9.6500	10.633	12.484	15.608	22.891	15
16	8.4579	8.6092	8.7474	8.8750	9.8284	10.505	11.544	13.500	16.807	24.541	16
17	9.2119	9.3714	9.5171	9.6516	10.656	11.368	12.461	14.522	18.010	26.192	17
18	9.9751	10.143	10.296	10.437	11.491	12.238	13.385	15.548	19.216	27.844	18